Écriture non-symbolique et mathématiques

Quatrième journée scientifique
du Pôle Académique de Bruxelles
« Former à l'écrit, former par l'écrit »
5 décembre 2019
Institut Ilya Prigogine

ICHEC
BRUSSELS MANAGEMENT SCHOOL

Pierre Job
Jean-Yves Gantois
5 Décembre 2019

SECTION 1

OBJECTIFS ET DÉFIS

Objectifs 1 et 2

- **Objectif 1**

  Exposer certaines facettes des **rapports** entretenus par les **étudiants** (nos) et par les **enseignants** (nous) à un **exemple** de **définition** mathématique (**niveau de production**), au travers du prisme de l'**écriture non-symbolique**.

- **Objectif 2**

  Montrer en quoi le **croisement** de ces rapports permet de faire **sens** des **difficultés** rencontrées par les étudiants et les enseignants face à cette définition et en quoi l'écriture non-symbolique offre une **piste d'évolution** de ces difficultés.

Écriture Non-Symbolique

- Par écriture **non-symbolique** nous entendons des productions écrites en langue usuelle telle

« Cette droite est composée de points caractérisés par la propriété suivante. Chaque point est une représentation géométrique d’un niveau de production qui rapporte un bénéfice de 2800 euros ».

Écriture Symbolique

- Par écriture **symbolique**, ce que d'aucuns pourraient considérer comme caractéristique des mathématiques, nous entendons des productions telle la suivante :

$$
\begin{tikzcd}
S \otimes_{R'} \mathscr{F}(V') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathscr{F}(h)"] & S \otimes_{R} \mathscr{F}(V) \\
S \otimes_{R'} R' \otimes_{A} \mathscr{F}(Y) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \mathscr{F}(v')^{\mathrm{a}}"] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varphi \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & S \otimes_{R} R \otimes_{A} \mathscr{F}(Y) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \mathscr{F}(v)^{\mathrm{a}}"'] \arrow[d, equal] \\
S \otimes_{A} \mathscr{F}(Y) \arrow[r, equal] & S \otimes_{A} \mathscr{F}(Y)
\end{tikzcd}
$$

Hypothèse didactique

- Le choix de travailler à partir d'un exemple « concret » (définition de niveau de production), ancré dans les mathématiques, et non l'exposé d'une théorie « abstraite », est la conséquence de l'hypothèse suivante.
- **Hypothèse didactique**

  Il y a une **dialectique** entre écriture non-symbolique et activité mathématique.

Hypothèse didactique (2)

- **Composantes**
  - Apprendre l’écrire non-symbolique en mathématiques ne peut se faire qu’en pratiquant les mathématiques.
  - Et pratiquer les mathématiques passe par le travail de l’écriture non-symbolique.
- => **Dialectique** (co-construction) entre activité mathématique et écriture non-symbolique pour les apprenants.

Objectif 3

- **Objectif 3**

  Crédibiliser l'hypothèse précédente, à savoir qu'il y a une dialectique entre activité mathématique et écriture non symbolique

Double défi de cet exposé

- **Défi 1**. Public (vous), pas forcément familier des théories didactiques employées.

    => S'appuyer sur un cadre théorique sans perdre les auditeurs dans du jargon technique.

Double défi de cet exposé (2)

- **Défi 2**. Public n’étant pas forcément féru de mathématique.

  => Éclairer les difficultés des étudiants et enseignants, aux prises avec les mathématiques, sans perdre les auditeurs avec les mathématiques.

- Remarque : Passage inéluctable par les mathématiques, étant donnée l’hypothèse d’entrelacement des difficultés liées à la dimension de l’écrit avec la nature même des mathématiques.

Objectif 4

- Ces défis cadrent l'**objectif 4**.
- **Ouvrir la didactique** à un public plus vaste que la niche des didacticiens des mathématiques.
- Importance fondamentale pour nous de réussir à nous positionner à côté d'approches qui ne prennent pas en compte les dimensions épistémologiques (liées intrinsèquement à la science concernée) de la discipline cible et dont l'exposé au grand public peut, de ce fait, être plus accessible.
- => **Importance du retour du public pour évoluer**.

SECTION 2

CADRE THÉORIQUE

LA TAD

Bref historique

- **Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)**
  - Yves **Chevallard**, concepteur de la théorie (né en 1946).
  - Développe et étend les éléments **institutionnels** présents dans la théorie des situations didactique de Guy Brousseau (« situations problèmes » ; né en 1933).
  - Début dans les années 1980, avec un prototype : la théorie de la transposition didactique.
  - Théorie encore en développement à l’heure actuelle.

Rapport institutionnel au savoir

- Idée centrale de la TAD : étude des **rapports institutionnels** aux savoirs.
- Regard particulier (**modèle épistémologique**) sur les savoirs.
- Les savoirs (mathématiques) sont perçus comme « relatifs ».
- « Relatif », un savoir mathématique ?
- Oui au sens suivant …

Modèle didactique : croisement de rapports

- La véracité du théorème de Pythagore n'est pas mise en cause. Ouf ! Quoique …
- En revanche, les **rapports** à ce théorème peuvent être **différents** selon l'*institution* où il s'insère.
- => Le travail du didacticien consiste à construire des **modèles didactiques** composés de rapports institutionnels pertinents, dont le **croisement** permet de faire sens des phénomènes d'enseignement étudiés.
- Pourquoi les élèves éprouvent-ils des difficultés avec Pythagore ?

Institution

- En TAD, « institution » est un concept qui va au-delà du sens usuel.
- Est « **institution** » tout ce qui peut entretenir un rapport au savoir étudié.
- École, mathématicien, étudiant, élève, enseignant, chercheur, courant de pensée (bourbakisme, empirisme, esprit des lumières, libéralisme, constructivisme, platonisme, etc.) …

Institutions « cachées »

- Cette **plasticité** du concept d'institution permet précisément la prise en compte d'**institutions « cachées »**, i.e. qui ne sont pas apparentes à l'œil nu mais dont la considération est **instrumentale** pour **comprendre** les phénomènes d'enseignement.
- Nous verrons, par exemple, ci-dessous, qu'un enseignant peut avoir un rapport aux définitions dont il n'a pas lui-même pleinement conscience et qui impacte la manière dont ses étudiants peuvent s'emparer des définitions qu'il enseigne.

Différents niveaux institutionnels

- La difficulté à concevoir des modèles didactiques pertinents tient en partie à la difficulté de localiser à quel niveau étudier des rapports institutionnels.

Différents niveaux institutionnels (2)

Humanité

↓↑

Civilisation

↓↑

Société

↓↑

École

↓↑

Pédagogie

↓↑

Système didactique

SECTION 3

CONTEXTE

Le contexte

- Ichec Brussels Management School.
- 800 étudiants.
- 1$^{\text{ère}}$ Bac, 1$^{\text{er}}$ quadrimestre.
- 2h par semaine.
- 2 enseignants.
- Cours de math articulé autour de problèmes d’optimisation à caractère écononomique.

Type de problème étudié

- Exemple **type de problème** traité dans le cours (**T**) : il servira de support au reste de l'exposé.
- Une entreprise vend deux biens **A** et **B** dont les bénéfices unitaires respectifs sont de 10 et 12 euros. A et B nécessitent l'utilisation de cuivre et de fer pour leur réalisation. Chaque unité de A demande 100 g de cuivre et 120 g de fer. Chaque unité de B demande 150 g de cuivre et 90 g de fer. Étant donné un stock de 2500 g de cuivre et de 3000 g de fer, **combien d'unités de chaque bien l'entreprise devrait-elle produire pour maximiser son bénéfice** ?

Résumé

- Résumé des infos contenues dans l'énoncé, pour la facilité de l'auditeur (n'est pas donné aux étudiants)

Biens	Bénéfice	Cuivre	Fer
A	10 €/unité	100 g/unité	120 g/unité
B	12 €/unité	150 g/unité	90 g/unité
		2500 g	3000 g

SECTION 4

MÉTHODOLOGIE

Étude institutionnelle de quoi ?

- La totalité des rapports des enseignants et étudiants entre eux et autour du type de problème **T** ne peut pas être exposée dans cette seule communication.
- On se limitera aux objectifs annoncés dans l'introduction, en se **polarisant sur les rapports relatifs à la définition de « Niveau de production »**, i.e. comment ils interagissent et évoluent dans le temps

Les institutions considérées

- L'**exposé** des rapports institutionnels peut être **délicat**. Non que le rapport d'une institution spécifique soit nécessairement complexe (quoique) mais parce que les **rapports** de plusieurs institutions **s'entrecroisent**.
- **Enseignants-Avant**. Nous, en tant qu'enseignants, avant d'avoir mené à bien l'étude présentée ici.
- **Étudiants-Avant**. Nos étudiants, avant d'avoir mené à bien cette même l'étude.
- **Les mathématiques**.

Insertion de l’écriture non-symbolique

- L’écriture non-symbolique **apparaitra sur le tard** dans l’exposé de notre modèle.
- Conséquence de son intrication avec les mathématiques (hypothèse déjà formulée).
- => Patience.

SECTION 5

RAPPORT DES ENSEIGNANTS-AVANT

À

LA DÉFINITION DE « NIVEAU DE PRODUCTION »

COUCHE 1

Rapport des enseignants-avant

- Commençons par exposer une première couche du rapport des enseignants-avant au problème **T**.
- Quels sont les éléments mathématiques communiqués par ces enseignants aux étudiants et sous quelle forme ?
    - Le concept de « Niveau de production » est introduit d'emblée dans le cours par l'entremise d'un texte que les étudiants doivent lire.
    - Il s'agit d'une terminologie standard en économie. Les enseignants l'introduisent pour relier les cours de maths aux cours d'économie.

Rapport des enseignants-avant (2)

- Les enseignants donnent aux étudiants un énoncé similaire à celui proposé en exemple, assorti d'un commentaire précisant que « le nombre d'objets de chaque type produit [...] s'appelle le **niveau de production** ».
- Les enseignants posent ensuite deux questions aux étudiants :
  - « Qu'est-ce qu'un niveau de production ? »
  - « Quel est le problème étudié ? »

Rapport des enseignants-avant (3)

- Ces questions sont considérées comme tout à fait **élémentaires** par les enseignants, tant le travail est perçu comme **prémâché**.
  - Il suffit de repérer dans l'introduction la partie relative à « Niveau de production » et de **redire avec ses mots** ce qui est perçu comme une **évidence**.
  - Idem avec « Quel est le problème étudié ? »

Rapport des enseignants-avant (4)

- Les enseignants **attendent** des étudiants des réponses similaires aux suivantes.
  - « Le niveau de production de deux biens est le nombre d'unités qu'on produit de chaque bien ».
  - « Le problème traité consiste à déterminer le niveau de production qui maximise le bénéfice tout en respectant les contraintes liées à la production ».

Rapport des enseignants-avant (5)

- Par la suite, le **concept** de niveau de production est employé à tous les cours par les enseignants, qui le considèrent comme **acquis** et totalement **transparent**.
- Pratiquement, **tous les raisonnements sont formulés de près ou de loin à l'aide de cette terminologie**.
- C'est **inévitable** du point de vue des enseignants, puisque le problème à résoudre est de déterminer le niveau de production qui maximise le bénéfice.

SECTION 6

RAPPORT DES ÉTUDIANTS-AVANT

À

LA DÉFINITION DE « NIVEAU DE PRODUCTION »

COUCHE 1

Rapport des étudiants-avant

- Voyons comment se positionnent les étudiants-avant par rapport à ce concept grâce à un test effectué après 7 semaines de cours.
- 618 étudiants ont passés le test.
- 10 séries de questions.
- L'exemple ci-dessous est tiré de la série 1 (80 étudiants).
- Les tests sont sous forme de QCM.

Rapport des étudiants-avant (2)

- Une entreprise produit trois biens, A, B et C dans les quantités respectives, c_1, c_2 et c_3. Les bénéfices unitaires sont respectivement de q_1, q_2 et q_3 euros; chaque unité de bien A, B et C consomme respectivement p_1, p_2 et p_3 grammes d'or et on dispose au total de 100 grammes d'or. Alors il est vrai que:

a) 02,74% Le niveau de production est (q_1, q_2, q_3).

b) 00,00% Le niveau de production est $q_1 + q_2 + q_3$.

c) **20,55% Le niveau de production est la quantité totale des biens produits => 20%**

d) 05,48% Le niveau de production est un couple de nombre.

e) 06,85% Le niveau de production est un nombre réel.

f) 02,74% Le niveau de production est un entier naturel.

g) 09,59% Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

h) 02,74% J'ignore quelle est la bonne réponse.

i) **49,32% Sans réponse => 50%**

Rapport des étudiants-avant (3)

- 50% des étudiants n'ont pas répondu à la question alors qu'il n'y avait pas de points négatifs en cas de mauvaise réponse et qu'il y avait une réponse « J'ignore quelle est la bonne réponse ».
- Parmi les 50% qui ont répondu, 80% ont donné une réponse considérée comme incorrecte par les enseignants-avant.
- Parmi ces 80%, 50% des étudiants ont répondu que le niveau de production est la **quantité totale des biens produits**.
- Seuls 10% des étudiants présents ont coché la bonne réponse.

SECTION 7

RAPPORT DES ENSEIGNANTS-AVANT

COUCHE 2

Rapport des enseignants-avant

- Du point de vue des enseignants-avant, la réponse « C'est la quantité totale des biens produits » **est incorrecte** car elle écrase l'information qui distingue chaque type de bien, contenue dans le concept de niveau de production.
- Au lieu de savoir qu'on doit vendre, par exemple, 100 biens de type A et 150 de type B, on sait juste qu'on dispose de 250 biens au total.
- Ce n'est **plus la même information**.

Rapport des enseignants-avant (2)

- **Malaise profond** chez les enseignants.
- Comment est-il possible qu’un concept, considéré comme particulièrement élémentaire par les enseignants, soit le théâtre de telles incompréhensions ?
- Les enseignants ont du mal à envisager autre chose qu’un **manque d’étude et de précision** de la part des étudiants.

SECTION 8

POINT DE VUE DU DIDACTICIEN

INTERPRÉTATION DES RAPPORTS

Point de vue du didacticien

- Comment se positionner par rapport au point de vue de ces enseignants ?
- Ce sont des enseignants expérimentés.
- Ils ont à cœur le développement de leurs étudiants et ne mâchent pas leur peine pour améliorer leurs cours d'année en année.
- Peut-être les étudiants n'étudient pas assez ?
- Examinons des productions d'étudiants pour comprendre.

Point de vue du didacticien (2)

- Voici une définition de niveau de production donnée par un étudiant : « C'est le nombre ou la quantité de ces deux biens produits ».
- Cette définition serait considérée comme ambigüe par les enseignants, et à juste titre.

Point de vue du didacticien (3)

- En effet, « le nombre » fait-il référence à la quantité globale des biens (250 =100 +150), à la quantité de chacun des biens (100,150), ou encore à autre chose ? Ce n’est pas clair.
- La grille de lecture, consistant à attribuer de telles définitions à un « manque de précision », peut se comprendre lorsqu’on est mis face à des définitions aussi lapidaires que « C’est les biens ».
- Ce type de réponse est loin d’être marginale.

Point de vue du didacticien (4)

- En réaction à de telles définitions, les enseignants ont demandé aux étudiants (avec insistance) de mieux étudier, d'être plus précis dans leurs définitions …
- Globalement, ces demandes n'ont pas été rencontrées. Leur effet est resté négligeable sur l'évolution des définitions proposées par les étudiants.
- Est-ce à dire que les hypothèses des enseignants quant au manque d'étude et/ou de précision sont crédibilisées ?

Point de vue du didacticien (5)

- Sans écarter totalement ces hypothèses, nous pensons que le croisement des rapports des uns et des autres aux définitions est de nature à mettre en évidence une **problématique de nature épistémologique** qui conditionne fortement les possibilités des étudiants à conformer leurs rapports personnels (aux définitions) au rapport attendu par les enseignants.

Point de vue du didacticien (6)

- En effet, certains étudiants sont **précis** dans des définitions qui n’en restent pas moins **incorrectes** du point de vue des enseignants ; telle la suivante : « Si on considère deux biens A et B, le niveau de production correspond à l’ensemble des biens A et B produits ».

Point de vue du didacticien (7)

- On retrouve l'idée de nombre global lié à la production, mais cette fois exprimé explicitement.
- Cette vision du niveau de production est suffisamment fréquente, comme l'indique les résultats du test, pour pointer une composante autre qu'un simple « manque d'étude ».
- Y a-t-il une logique à cette prégnance ? De quoi s'agit-il ?

Point de vue du didacticien (8)

- L’introduction faite par les enseignants auprès des étudiants du niveau de production se limitait à une définition supposée évidente *a priori*.
- Elle semblait tellement évidente aux enseignants qu’ils n’imaginaient pas un seul instant qu’elle puisse poser problème aux étudiants.
- Or précisément, le dialogue avec ces étudiants fait ressortir que leurs rapports aux définitions sont fortement teintés de couleurs qui ne sont pas uniquement de nature mathématique. Loin s’en faut.

SECTION 9

RAPPORT DES ÉTUDIANTS-AVANT

AUX

DÉFINITIONS

Rapport des étudiants-avant aux définitions

- Les étudiants entretiennent aux définitions des **rapports complexes** dont les composantes peuvent être **contradictoires entre elles.**
  - Les étudiants se situent dans différents niveaux institutionnels.
- Présentons une de ces **composantes**, de nature à faire ressortir l’écart qui peut exister avec le rapport des mathématiques/enseignants à ces mêmes définitions.

Rapport des étudiants-avant aux définitions

- **Composante : rapport empiriste aux définitions**
  - Les étudiants ont très souvent un rapport empiriste aux définitions.
  - Les définitions sont la mise en mots de ce que les sens permettent d'observer.
  - L'observation est considérée comme un fait, i.e. quelque chose de transparent de par l'évidence véhiculée par les perceptions sensorielles.
  - Une définition est naturelle et ne demande pas de travail, d'effort épistémologique pour être élaborée.

SECTION 10

RAPPORT DES MATHÉMATIQUES

AUX

DÉFINITIONS

Rapport des mathématiques aux définitions

- En **sciences**, les définitions sont souvent construites **contre l'évidence des sens**.
  - Galilée et la chute des corps.
  - Définition de vitesse instantanée.
  - Entreprise intellectuelle d'organisation du réel pour le rendre intelligible.
  - Les faits ne sont pas absolus mais ils sont des observations résultant de grilles de lectures relatives (Popper).

Rapport des mathématiques aux définitions

- Rapport contradictoire avec la manière dont les mathématiques construisent leurs définitions.
- En **mathématiques**, les définitions sont notamment construites pour faire des **preuves**, pour des besoins d'**efficacité structurelle** (le plus petit nombre de concepts qui permettent d'élaborer la théorie la plus vaste).

SECTION 11

POINT DE VUE DU DIDACTICIEN

INTERPRÉTATION DES RAPPORTS

Point de vue du didacticien

- **Écart** considérable entre rapports des mathématiques/enseignants aux définitions et ceux des étudiants.
- Et alors ? La solution semble simple.
- Pourquoi les enseignants n'explicitent-ils pas à quoi servent les définitions et les faire construire aux étudiants ?
- Pas si simple …

Point de vue du didacticien (2)

- **Rapport empiriste** aux définitions : **obstacle épistémologique majeur** dans la compréhension des sciences et des mathématiques.
  - Bien établi dans la littérature.
  - Il est résistant !
  - Pourquoi cela ?
  - Différentes raisons. Considérons les suivantes.

Point de vue du didacticien (3)

- Sortir d’un rapport empiriste n’est pas qu’une question de bien ou mal expliquer.
- Expliciter tous les tenants et les aboutissants ne suffit pas !
- Cela demande de la part de l’étudiant une **mise en question profonde** de ses modes de pensée et de son rapport au réel.
- Peu réaliste dans une perception linéaire du temps de l’apprentissage.

Point de vue du didacticien (4)

- Rapport aux définitions peu ou pas travaillé, que ce soit au secondaire ou dans le supérieur.
  - À nouveau, multitudes de raisons.
  - Certaines sont très prosaïques et pourtant bien présentes.
    - Programmes surchargés.
    - Liées (mais pas que) à l’évolution rapide des sciences et techniques.

Point de vue du didacticien (5)

- Perception de manque de temps pour traiter des questions de rapports aux définitions.
- D'autant que ces rapports ne sont pas directement perçus comme mathématiques, au sens d'un contenu classique de cours de mathématique.
- Exemple analogue.
  - Apprendre à résoudre des équations

  versus
  - Passer du temps à construire le concept d'équation

Point de vue du didacticien (6)

- Raisons liées au rapport des enseignants aux définitions et à leurs étudiants.
  - Conscience du caractère exigeant de certaines définitions particulièrement techniques (définition de limite) mais ce n'est pas le cas de celle de « Niveau de production » !
  - Pas de **densité épistémologique** du « Niveau de production ». À peine un concept. Essentiellement une terminologie.
  - Faible **conscience** des enseignants du rapport **épistémologique** de leurs propres étudiants aux définitions, surtout celles considérées comme (très) élémentaires.

Point de vue du didacticien (7)

- => réduction des stratégies d'enseignement possibles à des dimensions non épistémologiques.
- Stratégie d'enseignement par **ostension**.
  - « Je montre, tu vois et donc tu comprends ».
  - Stratégie dominante : déguisement en situations-problèmes, dévoiement des situations fondamentales.
  - Théorisé par Brousseau (théorie des situations didactiques) comme grille de lecture des phénomènes didactiques.
- Stratégies motivationnelles
  - Encouragements, mise en valeur, récompenses, …
  - Injonctions (sois plus précis, étudie plus …)
- Et quand ces stratégies échouent ? Et c'est hélas le cas !

Point de vue du didacticien (8)

- L'exemple des enseignants en *flexologie*…
- Quand les stratégies d'ostension et motivationnelles échouent, tendance des enseignants à adopter une **grille de lecture morale** (manque d'étude, manque de précision, ...).
- Enseignants et étudiants ignorent leurs rapports respectifs aux définitions et interagissent dans des dimensions à intersections qui peuvent s'avérer vide => cercle vicieux.

Point de vue du didacticien (9)

- Comment est possible cette faible conscience épistémologique ?
- Difficile de problématiser une définition comme celle de « Niveau de production » tellement elle semble évidente, transparente, naturelle, inévitable.
- Cette problématisation est un travail en soi !

  => Boulot du didacticien.

SECTION 12

DONNER UNE ÉPAISSEUR ÉPISTÉMOLOGIQUE AU CONCEPT DE « NIVEAU DE PRODUCTION »

Donner une épaisseur épistémologique

- Peut-on problématiser la définition de « Niveau de production » d'un point de vue épistémologique ?
- Cette problématisation épistémologique a-t-elle une quelconque légitimité du point de vue des mathématiques ?
- Quelle est sa viabilité dans notre institution ?
- Comment le mettre en place ?

Donner une épaisseur épistémologique (2)

- On peut formuler l'objectif fondamental à atteindre dans le type de problème **T** comme suit.
- **Formulation 1**. Une entreprise souhaite déterminer combien elle doit produire d'unités de chaque bien afin de maximiser son bénéfice tout en respectant des contraintes liées à la production.
- Il y a donc deux inconnues à déterminer.
  - « Combien d'unités de chaque bien » (pour simplifier).
  - Le bénéfice maximal.

Donner une épaisseur épistémologique (3)

- Étant donné la nature « non-atomique » de l'inconnue « Combien d'unités de chaque bien » et son rôle central dans le problème à résoudre, on lui donne le nom de niveau de production.
- **Définition**. **Le niveau de production** de deux biens est donc le nombre d'unités qu'on produit de chacun de ces biens.
- **Exemple**. 100 unités du bien A et 150 du bien B constitue un niveau de production.

Donner une épaisseur épistémologique (4)

- Le problème initial peut alors se reformuler de manière compacte comme suit.
- **Formulation 2**. Une entreprise souhaite déterminer le niveau de production qui maximise son bénéfice tout en respectant les contraintes liées à la production.

Donner une épaisseur épistémologique (5)

- La définition de niveau de production n’est pas arbitraire.
- Elle est motivée par la logique interne du problème.
- Elle pointe explicitement une composante clef que le problème **T** demande de déterminer.
- Un autre aspect mérite d’être souligné.

Donner une épaisseur épistémologique (6)

- La reformulation du problème à l'aide du concept de niveau de production fait apparaître une **structure entre les inconnues**.
- Le bénéfice dépend du niveau de production.
  - Sachant « combien d'unités on produit de chaque bien », on peut calculer le bénéfice associé.
- Dans le jargon mathématique, on dit que le bénéfice est **fonction** du niveau de production.

Donner une épaisseur épistémologique (7)

- L'apparition d'un lien fonctionnel entre niveau de production et bénéfice change le regard porté sur la résolution du problème et ouvre à une stratégie de résolution.
  - Il s'agit de parcourir les valeurs possibles du niveau de production, à la recherche de celui qui maximise le bénéfice correspondant.

  => Résoudre le problème revient à étudier les variations d'une fonction.

Donner une épaisseur épistémologique (8)

- L’introduction du concept de niveau de production favorise l’adoption du regard fonctionnel sur la formulation initiale du problème.
- La définition et les (re)formulations adoptées n’ont rien d’arbitraire.
- Aussi élémentaires soient-elles, elles sont la partie émergente d’un mode de pensée mathématique fondamental. **La pensée fonctionnelle**.

Donner une épaisseur épistémologique (9)

- Définir et (re)formuler, c'est déjà entamer la résolution du problème, à l'aide d'une stratégie de pensée de « haut niveau ».
- Le mathématicien Grothendieck est célèbre pour avoir révolutionné les mathématiques en poussant cette approche à son paroxysme.
- Raffiner les formulations jusqu'à ce que le problème initial soit éclairé, de sorte qu'il n'y ait plus rien à résoudre.

Donner une épaisseur épistémologique (10)

- Mais la pensée fonctionnelle est peu ou pas étudiée dans le secondaire ni même dans le supérieur.
- Tendance marquée à enseigner le formalisme classique des fonctions au détriment du mode de pensée fonctionnel, comme stratégie de pensée pour résoudre des problèmes et développer des points de vue unifiés.
- Réduction similaire de la « pensée symbolique » à l'« écriture symbolique ».
- Oubli de l'histoire épistémologique.

Donner une épaisseur épistémologique (11)

- L'instrumentalité du formalisme/symbolisme est tel qu'il crée une illusion d'ubiquité, de transparence et de naturalité.

  => Importance de travailler ces modes de pensée en dehors d'un formalisme/symbolisme préconçu.

  => Importance de l'écriture non-symbolique.

SECTION 13

LE RÔLE DE L'ÉCRITURE

NON-SYMBOLIQUE

Le rôle de l’écriture non-symbolique

- Il ne suffit pas de disposer d’un discours qui donne de la substance épistémologique au concept de « Niveau de production ».
- Il faut créer un environnement dans lequel les étudiants vont pouvoir s’approprier ce discours de manière à faire évoluer leur rapport aux définitions.
- Le rôle de l’écriture non-symbolique est de servir d’assise à un tel environnement, selon le principe suivant.

Le rôle de l’écriture non-symbolique (2)

- Les enseignants se servent des définitions écrites des étudiants de « Niveau de production » comme support pour **initier une dialectique** permettant aux étudiants de prendre conscience des limites de leurs définitions et **créer un niveau de rationalité partagé**, qui ne serait pas celui que l’enseignant aurait imposé à l’étudiant sans que ce dernier ait la possibilité d’en comprendre la rationalité.

Le rôle de l’écriture non-symbolique (3)

- L’amorce d’une telle dialectique peut se faire de manière mesurée. Exemple.
- Avec la définition « c’est l’ensemble des biens produits », l’enseignant peut demander à l’étudiant de calculer le bénéfice obtenu « sachant qu’il dispose de 250 unités des biens au total ».
- L’étudiant réfléchit et conclut que cela n’est pas possible car les deux biens ont un bénéfice unitaire différent.

Le rôle de l’écriture non-symbolique (4)

- L’enseignant lui demande alors de quelle information il devrait disposer pour pouvoir réaliser ce calcul.
- L’information « Combien d’unités de chaque » apparaît de manière inéluctable.
- On dispose alors d’un premier levier pour lui faire écrire une nouvelle définition de niveau de production, pertinente par rapport à l’objectif d’étudier le bénéfice, car il a pu lui-même vivre et construire l’information dont il a besoin pour le calculer.

Le rôle de l’écriture non-symbolique (5)

- Le caractère écrit de la définition permet de créer une mémoire commune, consultable à tout moment.
- Les étudiants peuvent faire évoluer cette définition, au fur et à mesure des besoins qui voient le jour, pour résoudre le problème de départ.
- Ils disposent à tout moment des évolutions successives des définitions de « Niveau de production ».

Le rôle de l’écriture non-symbolique (6)

- On comprend qu’à ce jeu d’écriture particulier, instrumenté par les besoins d’un problème de math, apprendre à écrire ne peut se faire indépendamment du cadre mathématique et qu’apprendre les maths se fait également au travers de l’écrit.
- C’est aussi l’écriture qui nous a permis de constater que les simples demandes de reformulations ne menaient à rien, si ce n’est à la perplexité de nos étudiants ; cela nous a conduit à formuler des questions dont ils pouvaient s’emparer afin de faire évoluer leur définition du concept visé.

SECTION 14

CONCLUSIONS

ET

PERSPECTIVES

Conclusions et perspectives

- Importance de prendre en compte de manière non superficielle les spécificités de l’écrit en mathématiques, en prenant en charge au moins deux aspects.

Conclusions et perspectives (2)

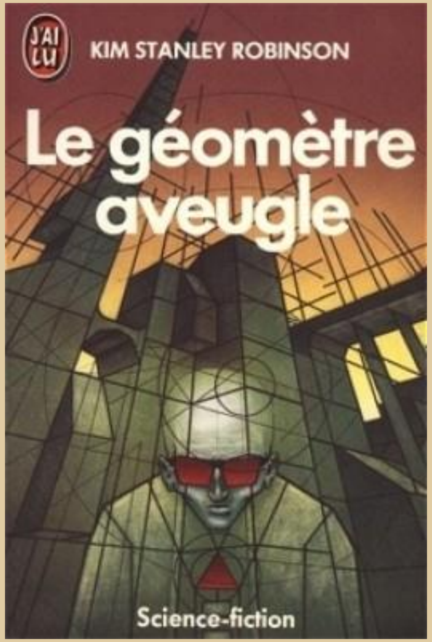
- **Aspect 1.**
  - Ne pas réduire l’écriture à la seule composante symbolique.
  - Prendre en compte la dimension non-symbolique de l’écriture, comme outil de transition, pour entrer dans les modes de pensée symbolique et fonctionnel, via la formulation de définitions accessibles au niveau de rationalité dont les étudiants sont capables.

Conclusions et perspectives (3)

- **Aspect 2.**
  - Travail explicite de la dimension écrite (symbolique et non-symbolique) dans ses deux axes.
    - **Axe 1**. Outil servant à expliciter, préciser, façonner sa pensée, en relation avec les mathématiques.
    - **Axe 2**. Marqueur de la progression dans cette compréhension.

Conclusions et perspectives (4)

- L'hypothèse de l'existence d'une dialectique entre écriture non-symbolique et activité mathématique participe à un modèle qui n'est pas une vérité absolue mais un point de vue permettant d'avoir prise sur le réel (Louis Antoine).



Conclusions et perspectives (5)

- Le domaine de validité de cette hypothèse se limite, pour le moment, au contexte des études réalisées.
- Il reste beaucoup de travail à effectuer pour déterminer comment se transposent nos modélisations à d'autres contextes.

Conclusions et perspectives (6)

- Nous sommes ouverts à des collaborations.
  - Avec d'autres disciplines, pour croiser les regards.
  - Avec des collègues enseignants dans d'autres institutions (secondaire, hautes écoles, universités, ...)
- En particulier, réflexion sur les articulations possibles entre secondaire et supérieur.

Conclusions et perspectives (7)

- Comment vous, auditeurs, vous positionnez-vous par rapport aux liens évoqués dans notre exposé, entre écriture et mathématiques ?
- Quelle est votre perception de l'hypothèse d'entrelacement entre écriture et spécificités épistémologiques de la discipline visée ?
- Merci pour votre attention.